PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU ŚLĄSKIEGO W KATOWICACH NR 12
PRACE MATEMATYCZNE II, 1972

MIECZYSŁAW KUCHARZEWSKI

Liesche Ableitung der Tensordichten

In der Note [6] wurde eine axiomatische Definition der Lieschen Ableitung der linearen homogenen geometrischen Objekte s-ter Klasse gegeben und mit Hilfe dieser Definition die allgemeine Form der Lieschen Ableitung der Skalare bestimmt. Hier wird die allgemeine Form der Lieschen Ableitung der beliebigen Tensordichten abgeleitet.

Einige Bemerkung über die Geschichte und Literatur der Lieschen Ableitung sind in der Note [6] enthalten. Darum werde ich diese hier nicht wiederholen. Ich erwähne nur an die Arbeiten von C. I. ISPAS [2], [3], [4], Л. Е. ЕВТУШИК [12] und A. SZYBIAK [10], die mit unseren Betrachtungen verbunden sind und in der Note [6] nicht angegeben wurden.

In den §§ 1 und 2 führe ich einige Bezeichnungen und Defininionen ein, die im folgenden nötig sind. Insbesondere enthält der Paragraph 2 die Definition der Lieschen Ableitung für die linearen homogenen geometrischen Objekte erster Klasse. Der Satz über die Form der Lieschen Ableitung der Tensordichten wird im § 3 bewiesen.

§ 1. Es sei ω (ω^a) ein abstraktes geometrisches Objekt mit der Transformationsformel

$$(1.1) \qquad \omega^{a'} = F^{a'}_{b}(A)\omega^b, \qquad a, b = 1, 2, \dots, m, \qquad A \in L^n_1 = GL(n,R),$$

und mit der Faser $M = R^m$ (vgl. [7], S. 60, bzw. [8] S. 24). Aus (1.1) folgt, daß ω ein rein differentielles Objekt des Typus $[m, n, 1]$ ist. Das Objekt ω heißt linear homogen, weil seine Transformationsformel hinsichtlich ω linear homogen ist. Die Funktionen $F^{a'}_{b}$ erfüllen die folgenden Relationen

$$F^{a''}_{b'}(B) \; F^{b'}_{c}(A) = F^{a''}_{c}(B \cdot A), \quad F^{a'}_{b}(E) = \delta^{a'}_{b},$$

wo A und B beliebige nichtsinguläre Matrizen der Ordung n sind und E die Einheitsmatrix bedeutet. Diese Relationen erhält man aus der fundamentalen Funktionalgleichung (vgl. [8], (6.1), S. 24) und aus der Identitätsbedingung (vgl. [8], (6.2), S. 24), die jede Transformationsformel des geometrischen Objektes erfüllen muß.

Außer der Tensordichten sind die sogenannten S-Tensoren, [1], [9] bzw. D-Tensoren, [5], Beispiele solcher Objekte.

Mit Hilfe des Objektes (1.1) kann ein neues Objekt $(\omega^a, \omega^b_{,\nu})$ gebildet werden. Wir nennen es die erste differentielle Erweiterung von ω.

Die Transformationsformel von $(\omega^a, \omega^b_{,\nu})$ besteht aus (1.1) und (1.2)

$$(1.2) \qquad \omega^{a'}_{,\nu'} = F^{a'}_{b,\nu}(A)\, A^{\nu}_{\nu'}\, \omega^b + F^{a'}_{b}(A)\, A^{\nu}_{\nu'}\, \omega^b{}_{,\nu},$$

wo $F^{a'}_{b,\nu}(A) = \partial F^{a'}_{b}(A)/\partial \xi^{\nu}$ ist. Die erste differentielle Erweiterung $(\omega^a, \omega^b_{,\nu})$ ist ein geometrisches Objekt, weil ihre Transformationsformel (1.1), (1.2) der fundamentalen Funktionalgleichung und der Identitätsbedingung genügt. Es ist linear homogen zweiter Klasse.

Insbesondere hat die erste differentielle Erweiterung des kontravarianten Vektors v (v^λ) die folgende Transformationsformel

$$(1.3) \qquad v^{\lambda'} = A^{\lambda'}_{\lambda}\, v^{\lambda}$$

$$(1.4) \qquad v^{\lambda'}_{,\nu'} = A^{\lambda'}_{\lambda\nu}\, A^{\nu}_{\nu'}\, v^{\lambda} + A^{\lambda'}_{\lambda}\, A^{\nu}_{\nu'}\, v^{\lambda}_{,\nu} \qquad \lambda, \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Komitante des Objektes $(\omega^a, \omega^b_{,\nu})$ wird Differentialkomitante erster Ordnung des Objektes ω genannt, (vgl. [7] S. 117 bzw. [8], S. 57).

K. YANO in [11] hat allgemeine Form der Lieschen Ableitung für die speziellen geometrischen Objekte beliebiger Klasse erhalten. Er hat auch gezeigt, daß die Liesche Ableitung des Objektes ω dann und nur dann ein geometrisches Objekt darstellt, wenn ω linear ist. Aus den Ergebnissen von K. YANO folgt, daß die Liesche Ableitung der Tensordichten die folgende Form

$$\underset{v}{L}{}^a\, \omega = v^\nu\, \omega^a_{\nu} - F^{a\nu}_{ba}(E)\, \omega^b\, v^a{}_{,\nu}$$

hat. Hier wird gezeigt, daß eine ähnliche Form (3.2) für die Liesche Ableitung der Tensordichten aus der in [6] angegebenen Definition der Lieschen Ableitung folgt.

§ 2. Mit Hilfe der oben eingeführten Begriffe nimmt die in [6] angegebene Definition der Lieschen Ableitung für die Objekte erster Klasse die nachstehende Form an

DEFINITION 2.1. Liesche Ableitung des Objektes (1.1) hinsichtlich des kontravarianten Vektors (1.3) ist jede Differentialkomitante erster Ordnung von v und ω, die ein geometrisches Objekt mit der Transformationsformel (1.1) ist und die folgenden Bedingungen erfüllt:

(2.1) Sie ist hinsichtlich v linear.

(2.2) Sie ist hinsichtlich ω additiv

(2.3) Sie erfüllt die Leibnizsche Regel für Produkte von beliebigem Skalar σ und dem Objekt ω.

Wird die Liesche Ableitung kurz mit $L(v, \omega)$ bezeichnet, so kann man die in der Definition 2.1 auftretenden Bedingungen folgendermaßen darstellen.

In jedem Koordinatensystem drückt sich die Liesche Ableitung durch die m Funktionen der Veränderlichen v^λ, $v^\lambda_{,\nu}$, ω^a, $\omega^b_{,\nu}$, aus:

(2.4.) $$L(v, \omega) = (L^a(v^\lambda, v^\mu_{,\nu}, \omega^a, \omega^b_{,\nu})).$$

Die Funktionen L^a sind von dem Koordinatensystem unabhängig

(2.5) $$L^{a'}(v^{\lambda'}, v^{\mu'}_{,\nu'}, \omega^{a'} \omega^{b'}_{,\nu'})$$

und haben die folgende Transformationsformel

(2.6) $$L^{a'} = F^{a'}_b(A) L^b.$$

Für jede kontravariante Vektoren v_1, v_2 und für jede geometrische Objekte ω_1, ω_2 und für beliebige reelle Zachlen α, β, und für beliebiges Skalarfeld σ gelten die Relationen

(2.7) $$L(\alpha v_1 + \beta v_2, \omega) = \alpha L(v_1, \omega) + \beta L(v_2, \omega),$$

(2.8) $$L(v, \omega_1 + \omega_2) = L(v, \omega_1) + L(v, \omega_2),$$

(2.9) $$L(v, \sigma\omega) = \sigma L(v, \omega) + L(v, \sigma)\omega.$$

Die allgemeine Form der Lieschen Ableitung der Skalare bestimmt der in [6] bewiesene Satz.

SATZ 2.1. *Jede Liesche Ableitung, im Sinne der Definition 2.1, des Skalars σ hat die From:*

(2.10) $$L(v, \sigma) = \varrho\, v^\nu \sigma_{,\nu}$$

wo ϱ ein beliebiges Skalar ist.

§ 3. Jetzt wird der Satz 2.1. auf die beliebigen Tensordichten verallgemeinert.

Die Tensordichte der Valenz (p, q) und des Gewichtes $-\vartheta$ ist ein lineares homogenes geometrisches Objekt erster Klasse $\omega(\omega^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}_{\beta_1 \cdots \beta_q})$ mit n^{p+q} Komponenten und mit der Transformationsformel

(3.1) $$\omega^{\alpha'_1 \cdots \alpha'_p}_{\beta'_1 \cdots \beta'_q} = \varphi(J) A^{\alpha'_1}_{\alpha_1} \ldots A^{\alpha'_p}_{\alpha_p} A^{\beta_1}_{\beta'_1} \ldots A^{\beta_q}_{\beta'_q} \omega^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}_{\beta_1 \cdots \beta_q},$$

wo $\varphi(J)$ durch $|J|^\vartheta$ für Weylsche Dichte bzw. durch $(SgJ)|J|^\vartheta$ für gewöhnliche Dichte zu ersetzen ist.

(3.1) hat also die Form (1.1), wo $F^{a'}_b(A)$ $(a', b = 1,2, \ldots, m;\ m = n^{p+q})$ eine geeignete Funktion ist.

Allgemeine Gestalt der Lieschen Ableitung der Tensordichten bestimmt der nachstehende

SATZ 3.1. *Jede Liesche Ableitung, im Sinne der Definition 2.1, der Tensordichte* (3.1) *hinsichtlich des Vektors v,* (1.3), *hat die From*

(3.2) $$L^a(v, \omega) = \varrho\,(v^\nu \omega^a_{\ ,\nu} - F^{a\nu}_{ba}(E)\omega^b v^a{}_{,\nu}),$$

wo ϱ *ein beliebiges Skalar ist.* $F^{a\nu}_{ba}$ *bedeuten erste partielle Ableitungen der Funktion* $F^{a'}_{b}$ *hinsichtlich* $A^{\alpha'}_{\nu}$ *im Punkte* $E = \|\delta^\alpha_\nu\|$,

$$F^{a\nu}_{ba}(E) = \partial F^{a'}_{b} / \partial A^{\alpha'}_{\nu} \mid A^{\alpha'}_{\nu} = \delta^\alpha_\nu$$

B e w e i s. Wird in (2.9) ein beliebiges konstantes Skalarfeld, $\sigma,_\nu = 0$, eingesetzt, so ergibt sich, wegen (2.10), daß die Liesche Ableitung hinsichtlich ω erster Ordung homogen ist,

(3.3) $$L(v, \sigma\omega) = \sigma L(v, \omega).$$

Aus (3.3) und (2.8) folgt, daß $L(v, \omega)$ auch hinsichtlich ω linear ist,

(3.4) $$L(v, a\omega_1 + \beta\omega_2) = a\,L(v, \omega_1) + \beta\,L(v, \omega_2).$$

Wegen (2.7) und (3.4) sind die Funktionen L^a, welche die Liesche Ableitung bestimmen, hinsichtlich v^λ, $v^\lambda_{,\nu}$ und hinsichtlich ω^a, $\omega^a_{,\nu}$ linear. Sie müssen also die Form

(3.5) $$L^a = a^a_{ba}\omega^b v^a + b^{a\nu}_{ba}\omega^b v^a_{,\nu} + c^{a\eta}_{ba}\omega^b{}_{,\eta} v^a + d^{a\eta\nu}_{ba}\omega^b{}_{,\eta} v^a_{,\nu}$$

haben, wo die Koeffizienten a^a_{ba}, $b^{a\nu}_{ba}$, $c^{a\eta}_{ba}$, $d^{a\eta\nu}_{ba}$, konstant sind, d.h. von den Veränderlichen v^λ, $v^\lambda_{,\nu}$, ω^a, $\omega^a_{,\nu}$, nicht abhangen ([11], s. 21). Da aber die Liesche Ableitung der Leibnizschen Regel (2.9) genügt, erfüllen diese Konstanten gewisse Bedingungen. Um diese abzuleiten, schreiben wir die rechte Seite von (2.9) mit Hilfe der Funktionen (3.5) aus.

(3.6) $$L^a(v,\sigma\omega) = a^a_{ba}(\sigma\omega^b)v^a + b^{a\nu}_{ba}(\sigma\omega^b)v^a_{,\nu} + c^{a\eta}_{ba}(\sigma\omega^b)_{,\eta} v^a + d^{a\eta\nu}_{ba}(\sigma\omega^b)_{,\eta} v^a_{,\nu}.$$

(3.7) $$\sigma L^a(v,\omega) + \omega^a L(v,\sigma) = \sigma(a^a_{ba}\omega^b v^a + b^{a\nu}_{ba}\omega^b v^a{}_{,\nu} + c^{a\eta}_{ba}\omega^b{}_{,\eta} v^a + \\ + d^{a\eta\nu}_{ba}\omega^b{}_{,\eta} v^a{}_{,\nu}) + \varrho v^\nu \sigma_{,\nu}\,\omega^a$$

Durch Vergleichen der rechten Seiten von (3.6) und (3.7) erhalten wir die Relation

$$(c^{a\eta}_{ba} - \varrho\delta^a_b\delta^\eta_a)\,v^a + d^{a\eta\nu}_{ba} v^a{}_{,\nu} = 0,$$

aus deren folgt, daß

(3.8) $$d^{a\eta\nu}_{ba} = 0$$

und

(3.9) $$c^{a\eta}_{ba} = \varrho\delta^a_b\delta^\eta_a$$

ist.

Mit Hilfe der Beziehungen (3.8) und (3.9) kann die Liesche Ableitung (3.5) folgendermaßen

(3.10) $$L^a = a^a_{b\alpha}\omega^b v^\alpha + b^{a\nu}_{b\alpha}\omega^b v^\alpha_{,\nu} + \varrho\omega^a_{,\eta} v^\eta,$$

dargestellt werden.

Da L^a eine Komitante ist, muß sie dieselbe Gestalt (3.10) in jedem anderen Koordinatensystem haben, d.h. in dem Koordinatensystem (ν') haben die Funktionen L^a die Gestalt

(3.11) $$L^{a'} = a^{a'}_{b'\alpha'}\omega^{b'}v^{\alpha'} + b^{a'\nu'}_{b'\alpha'}\omega^{b'}v^{\alpha'}_{,\nu'} + \varrho\omega^{a'}_{,\mu'} v^{\mu'},$$

wobei

(3.12) $$a^{a'}_{b'\alpha'} = a^a_{b\alpha},$$

und

(3.13) $$b^{a'\nu'}_{b'\alpha'} = b^{a\nu}_{b\alpha}$$

sind. Wenn wir die in (3.11) auftretenden Ausdrücke $v^{\lambda'}$, $v^{\lambda'}_{,\mu'}$, $\omega^{b'}$, $\omega^{a'}_{,\mu'}$ durch ihre Werte aus den Transformationsformeln ersetzen, so geht (3.11) in die folgende

(3.14) $$L^{a'} = a^{a'}_{b'\alpha'}F^{b'}_c A^{\alpha'}_\beta \omega^c v^\alpha + b^{a'\nu'}_{b'\alpha'}F^{b'}_c A^{\alpha'}_{\beta\mu}A^{\mu}_{\nu'}\omega^c v^\beta + b^{a'\nu'}_{b'\alpha'}F^{b'}_c A^{\alpha'}_\beta A^{\mu}_{\nu'}\omega^c v^\beta_{,\mu} +$$
$$+ \varrho F^{a'}_{b,\beta}\omega^c v^\beta + \varrho F^{a'}_b \omega^b_{,\nu} v^\nu.$$

über. Andererseits kann man $L^{a'}$ aus der Transformationsformel (2.6) berechnen:

(3.15) $$L^{a'} = F^{a'}_b(a^b_{c\alpha}\omega^c v^\alpha + b^{b\nu}_{c\alpha}\omega^c v^\alpha_{,\nu} + \varrho\omega^b_{,\mu}v^\mu).$$

Durch Vergleichen der rechten Seiten von (3.14) und (3.15) erhalten wir

(3.16) $$F^{a'}_b a^b_{c\beta} - a^{a'}_{b'\alpha'}F^{b'}_c A^{\alpha'}_\beta - b^{a'\nu'}_{b'\alpha'}F^{b'}_c A^{\alpha'}_{\beta\mu}A^{\mu}_{\nu'} - \varrho F^{a'}_{c,\beta} = 0,$$

(3.17) $$F^{a'}_b b^{b\mu}_{c\beta} - b^{a'\nu'}_{b'\alpha'}F^{b'}_{c'}A^{\alpha'}_\beta A^{\mu}_{\nu'} = 0.$$

Setzen wir jetzt $A^{\alpha}_{\beta\mu} = 0$ in (3.16) ein, so ergibt sich

(3.18) $$F^{a'}_b a^b_{c\beta} - a^{a'}_{b'\alpha'}F^{b'}_c A^{\alpha'}_\beta = 0.$$

Aus (3.16) und (3.18) folgt die Identität

(3.19) $$(b^{a'\nu'}_{b'\alpha'}F^{b'}_c A^{\mu}_{\nu'} + \varrho F^{a'\mu}_{c\,\alpha'})A^{\alpha'}_{\mu\beta} = 0.$$

Da $A^{\alpha'}_{\mu\beta}$ nur der Bedingung $A^{\alpha'}_{\mu\beta} = A^{\alpha'}_{\beta\mu}$ genügen, kann man $A^{\alpha'}_{\beta\beta} = 1$ und $A^{\alpha'}_{\mu\beta} = 0$ für $\mu \neq \beta$ in (3.19) einsetzen. Dann erhalten wir

(3.20) $$b^{a'\nu'}_{b'\alpha}F^{b'}_c A^{\mu}_{\nu'} = -\varrho F^{a'\mu}_{c\,\alpha'}.$$

Für $A^{\alpha'}_\nu = \delta^\alpha_\nu$ geht (3.20) in die folgende

(3.21) $$b^{a\mu}_{c\alpha} = -\varrho F^{a\mu}_{c\alpha}(\delta^{\alpha}_{\nu}) = -\varrho\,\partial F^{a'}_{c}(E)/\partial A^{\alpha'}_{\mu}.$$

über. Auf diese Weise wurden die Konstanten $b^{a\nu}_{c\alpha}$ bestimmt. Wir müssen noch zeigen, daß diese Konstanten für beliebige $A^{\alpha'}_{\nu}$ und $A^{\alpha'}_{\mu\nu}$ die Beziehungen (3.19) und (3.21) identisch erfüllen. Das ist aber leicht zu sehen, wenn wir die aus (3.21) bestimmten Konstanten in (3.19) bzw. in (3.21) einsetzen und die Identitäten

(3.22) $$F^{a\nu}_{b\alpha}(E)\, F^{b}_{c}(A) = F^{a\mu}_{c\alpha}(A)\, A^{\nu}_{\mu}$$

berücksichtigen, die man durch Differenzieren der sogenanten Fundamentalgleichung

$$F^{a}_{b}(B)\, F^{b}_{c}(A) = F^{a}_{c}(B\,A),$$

nach B^{α}_{ν} und nachher Einsetzen $B^{\alpha}_{\nu} = \delta^{\alpha}_{\nu}$, erhalten kann.

Um den Satz zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß die Konstanten $a^{b}_{c\beta}$, die der Relation (3.18) genügen, gleich Null sind. Zu diesem Zwecke berechnen wir zuerst die Werte der Funktionen $F^{a'}_{b}$, wenn man für A eine skalare Matrix ϱE, $\varrho > 0$, einsetzt. Es ist

(3.23) $$F^{a}_{b}(\varrho\, E) = \varrho^{\vartheta+p-q}\,\delta^{a}_{b}.$$

Wenn wir jetzt $\varrho\, E$ für A in (3.18) einzetzen, so nimmt diese die folgende Gestalt

$$\varrho^{\vartheta+p-q}\,(a^{a}_{c\beta} - a^{a}_{c\beta}\,\varrho) = 0$$

an, aus deren folgt, daß $a^{a}_{c\beta}$ identisch verschwinden,

(3.24) $$a^{a}_{c\beta} = 0.$$

Werden die Beziehungen (3.21) und (3.24) in (3.10) eingesetzt, so geht (3.10) in (3.2) über und der Beweis ist beendet.

LITERATURA

[1] S. Gołąb, A. Jakubowicz: *O pewnym obiekcie geometrycznym czysto różniczkowym typu* [m, n, 1], *gdy* $m = \binom{n+1}{2}$, $n \geqslant 2$ ($m < n^2$), Zeszyty Naukowe Pol. Szczecinskiej 57 (1964), 5—18.

[2] C. I. Ispas: *Despre derivatele lui Lie si deformatia vectorilor contravarianti in spatiile cu conexiune*, Com. Academiei Rep. Populare Romaine 5 (2) (1955), 480—488.

[3] C. I. Ispas: *Despre derivatele lui Lie deformatia vectorilor contravarianti in spatiile generalizate*, Com. Acad. R. P. R. 5 (3) (1955).

[4] C. I. Ispas: *Interpretari geometrice in cadrul expurerii geometrice a teorier deformatailor*, Com. Stiintifice Acad. Militara generala, Bucuresti 1966, 355—360.

[5] A. Jakubowicz: *O kompresji wskaźników dla afinarów antysymetrycznych,* Zeszyty Nauk Pol. Szczecińkiej 39 (1963), 57—88.

[6] M. Kucharzewski: *Eine axiomatische Definition der Lieschen Ableitung,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 15 (9), (1970), 1457—1462.

[7] M. Kucharzewski: *Elementy teorii obiektów geometrycznych,* Katowice, 1969.

[8] M. Kucharzewski: and M. Kuczma: *Basic concepts of the theory of geometric objects,* Rozprawy Mat. 43, Warszawa 1964.

[9] M. Kucharzewski: *Einige Bemerkungen über die linearen homogenen geometrischen Objekte erster Klasse,* Ann. Polon. Math. 19 (1967), 1—12.

[10] A. Szybiak: *On the Lie dervative of geometric objects from the point of view of functional equations,* Zeszyty Nauk. Uniwersytetu Jagiel., Prace Mat. 11 (1966), 85—88.

[11] K. YANO: *The Theory of Lie Derivatives and Its Applications,* Amsterdam — Groningen, 1957.

[12] Л. Е. ЕВТУШНИК: *Производная Ли и дифференциальные уравнения поля геометрического объекта,* ДАН СССР 132 (1960), 998—1001.

MIECZYSŁAW KUCHARZEWSKI

POCHODNA LIEGO GĘSTOŚCI TENSOROWYCH

Streszczenie

W nocie została wyznaczona postać pochodnej Liego gęstości tensorowych w oparciu o definicję podaną w pracy [6]. Jeżeli prawo transformacji gęstości tensorowej $\omega\,(\omega^a)$, napiszemy w postaci, $\omega^{a'} = F^{a'}_{b}(A)\,\omega^b, a, b = 1, 2, \ldots m,\ \ m = n^{p+q}$, jej pochodnia Liego względem wektora kontrawariantnego $v\,(v^\lambda)$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, spełniająca warunki definicji 2.1, wyraża się wzorem. $L^a(v, \omega) = (v^\nu \omega^a{}_{,\nu} - F^{a\nu}_{b\alpha}(E)\,\omega^b v^\alpha{}_{,\nu})$, gdzie ϱ jest dowolnym skalarem, a $F^{\;\nu}_{b\alpha}$ są określone następująco

$F^{a\nu}_{b\alpha} = \partial F^{a}_{b} | \partial A^{\alpha'}_{\nu}$ (Satz 3.1).

Oddano do Redakcji 7. 4. 1970.